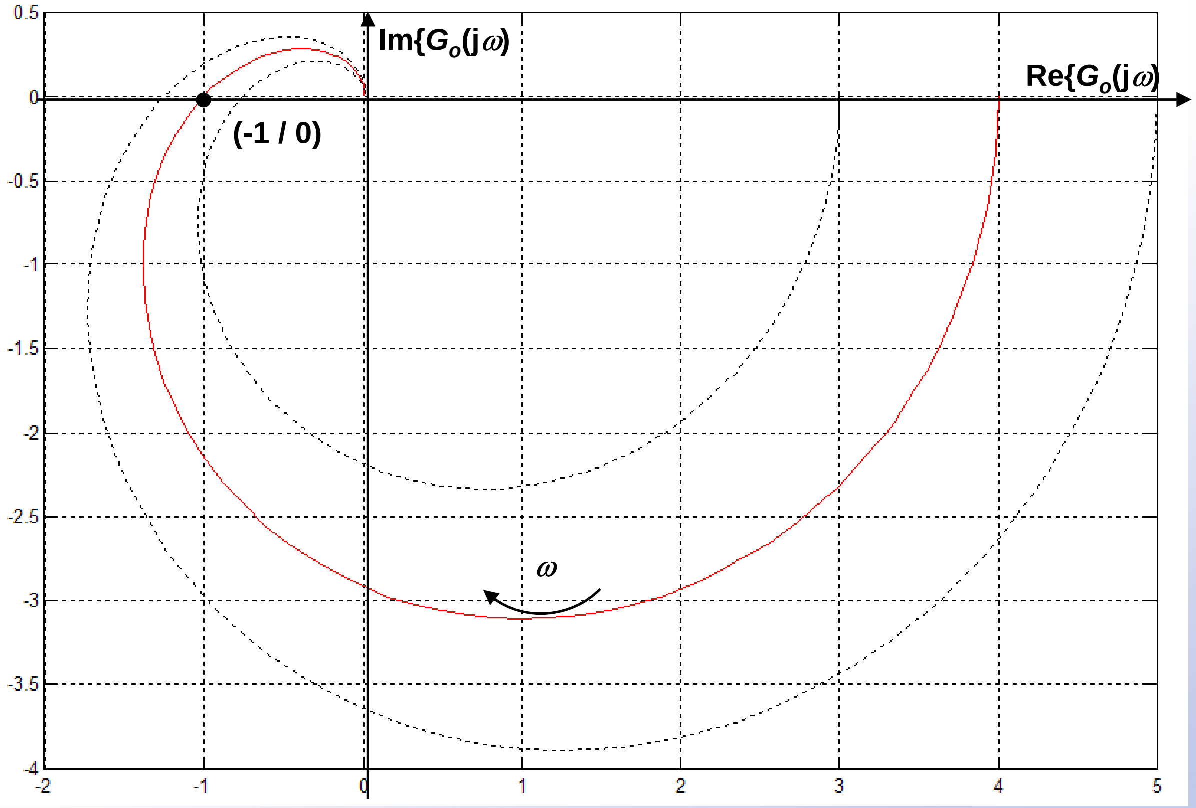
Anhang D: Stabilität linearer Systeme



Stabilität linearer Systeme
- Stabilitätskriterien

- **Aufgabe: Entwurf stabiler Regelkreise**

- **Problem: Koeffizienten a_i der ÜF eines geschlossenen Kreises hängen von den Reglerparametern $\underline{p}$ ab, numerische oder geschlossene analytische Berechnung der Pole nicht möglich**

$$G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = \frac{b_0(\underline{p}) + b_1(\underline{p})s + \ldots + b_{m-1}(\underline{p})s^{m-1} + b_m(\underline{p})s^m}{a_0(\underline{p}) + a_1(\underline{p})s + \ldots + a_{n-1}(\underline{p})s^{n-1} + a_n(\underline{p})s^n} = \frac{Z(s,\underline{p})}{P(s,\underline{p})}$$

- **Abhilfe: Stabilitätskriterien liefern Aussagen über die Stabilität des geschlossenen Kreis auch <u>ohne explizite Berechnung der Pole bzw. Zeitantwort</u>**

Stabilität linearer Systeme
- Das Stabilitätskriterium nach Hurwitz

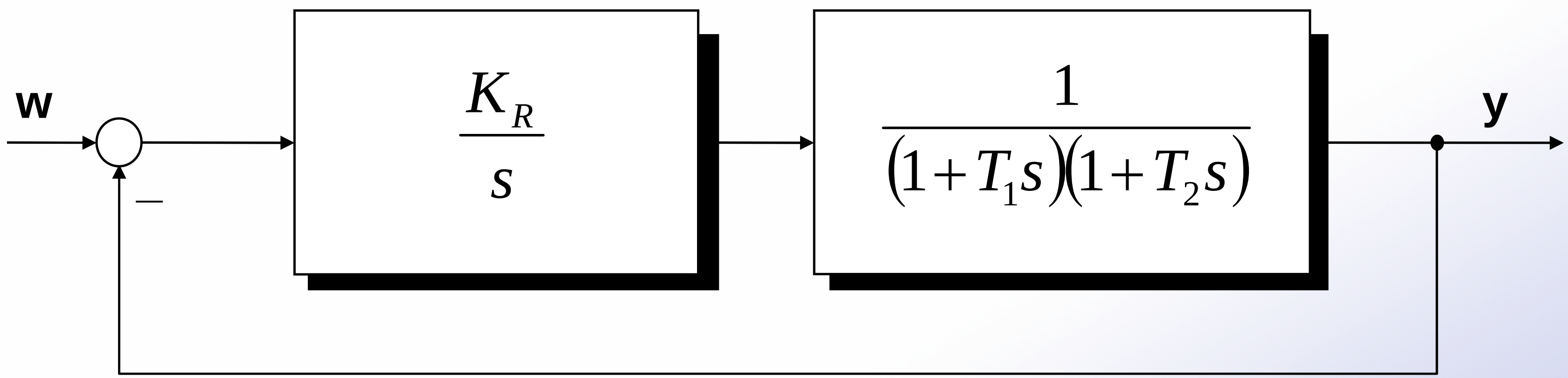
- **Stabilitätskriterium nach Hurwitz:**
  - **Alle Koeffizienten a_i vorhanden und gleiches Vorzeichen**
  - **„Hurwitz"-Determinanten D_i müssen alle > 0 sein**
- **Kriterium liefert einen Satz von Ungleichungen für die gesuchten Reglerparameter $\underline{p}$**

$$
\begin{array}{cccccccc}
D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & & & D_n \\
\end{array}
$$

$$
\begin{vmatrix}
a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n
\end{vmatrix}
$$

Stabilität linearer Systeme
- Beispiel Anwendung Hurwitz-Kriterium

- **Gegeben: Geschlossener Regelkreis mit I-Regler und PT_2-Strecke**



- **Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises**

$$G_w(s) = \frac{G_o}{1+G_o} = \frac{K_R}{K_R + s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1 T_2 s^3} = \frac{Z(s)}{P(s)}$$

- **Nenner *P*(*s*) ist Funktion des freien Reglerparameters K_R**

Stabilität linearer Systeme - Beispiel Anwendung Hurwitz-Kriterium

- **a_i > 0:** $a_0 = K_R, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = (T_1 + T_2), \quad a_3 = T_1 T_2$

  $\Rightarrow \qquad K_R > 0$

- **D_j > 0:** $D_2 = (a_1 a_2 - a_3 a_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 + T_2 - T_1 T_2 K_R > 0$

$$K_R < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$$

- **Resultat: Regelkreis stabil für**

$$\underline{0 < K_R < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}}$$

- **Einfach einzusetzen (graphische Auswertung „Stabilitätskarte“)**
- **Liefert strukturelle Einsichten bei der Wahl der Reglerparameter**
- **Automatische Plausibilitätsprüfung von Eingabeparametern**

Stabilität linearer Systeme
- Das Nyquist-Kriterium

- **Nachteile des Hurwitz-Kriteriums**

  - **Übertragungsfunktion G(s) des <u>geschlossenen</u> Kreises muss bekannt sein**

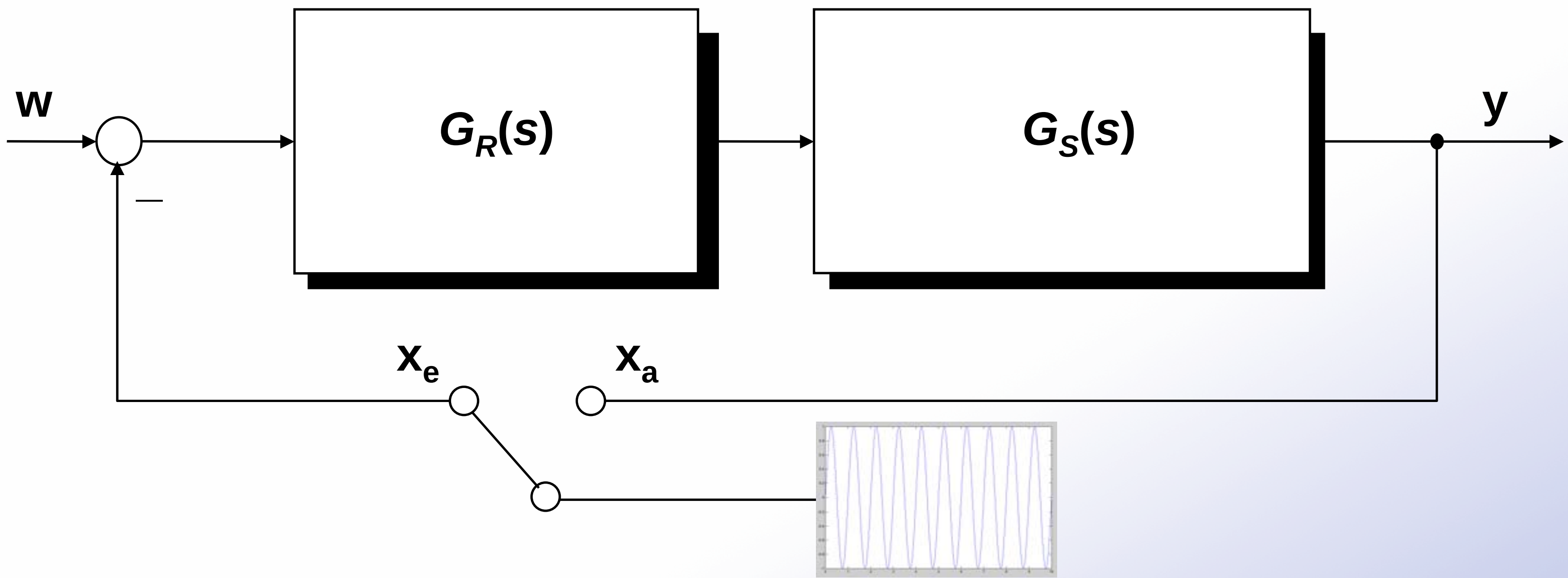
  - **Oft liegt der <u>Frequenzgang</u> eines <u>offenen</u> Regelkreises $G_o(s=j\omega)$ graphisch oder tabellarisch vor (z.B. aus Messungen)**

  - **Totzeiten $G_{T_t}(s) = e^{-sT_t}$ im Kreis können nicht behandelt werden**

- **Alternatives Stabilitätskriterium erforderlich:**

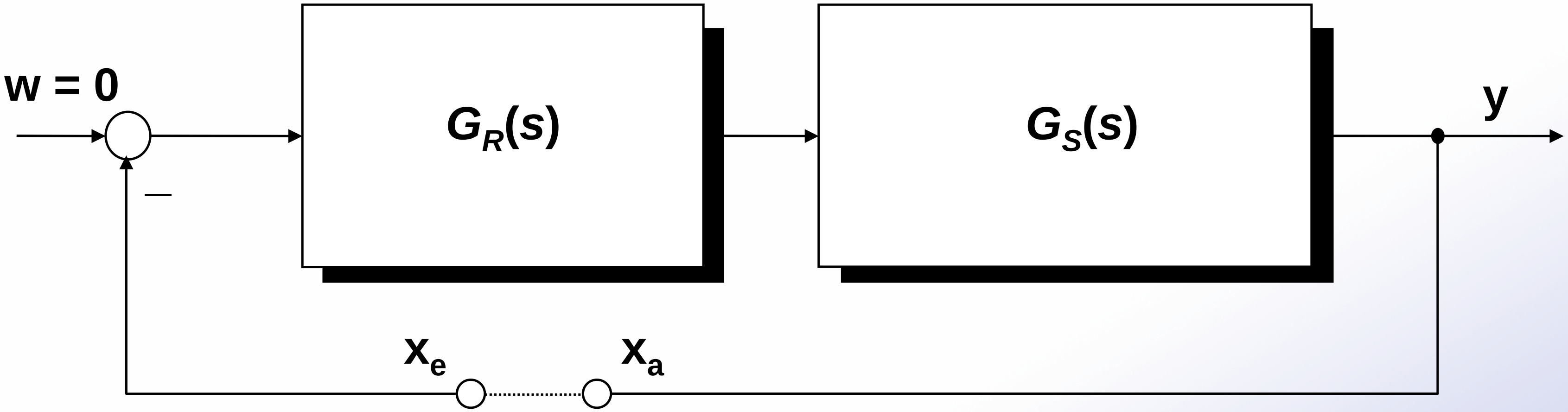
Nyquist - Kriterium

Stabilität linearer Systeme - Das Nyquist-Kriterium



- Regelkreis wird aufgetrennt
- An der Trennstelle wird ein Sinussignal eingespeist
- Offener Kreis überträgt das Signal bis zur Trennstelle x_a
- Frage: Wann würde die Schwingung bei umgelegtem Schalter aufrecht erhalten?

Stabilität linearer Systeme
- Das Nyquist-Kriterium



- **Die Schwingung bleibt genau dann erhalten, wenn gilt:**

$$x_e \overset{!}{=} x_a$$

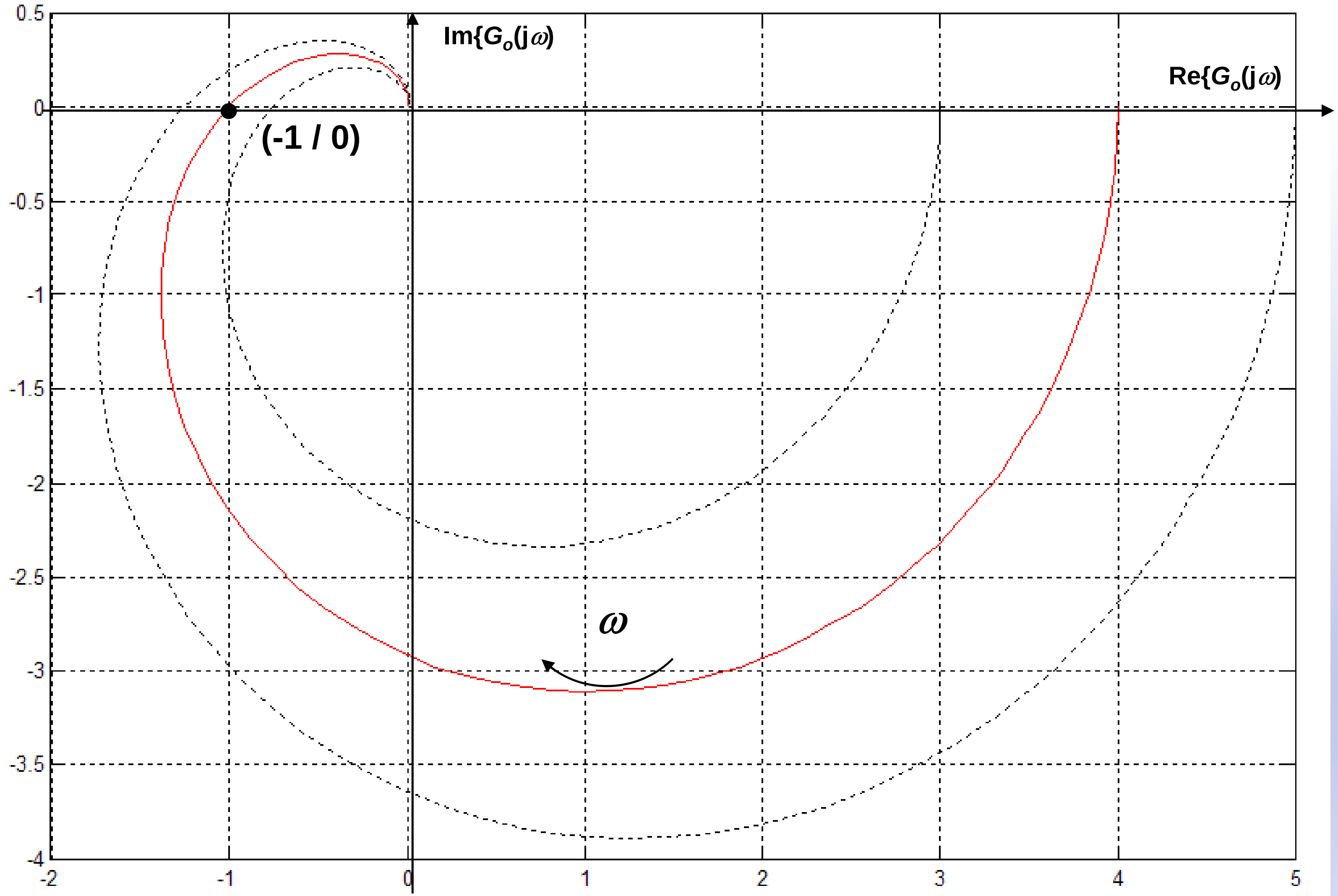
$$x_e = G_S(s) G_R(s)(-1) x_e = -G_o(s) x_e$$

$$x_e (1 + G_o(s)) = 0$$

$$1 + G_o(s) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{G_o(s) = (-1)}$$

Stabilität linearer Systeme
- Das Nyquist-Kriterium



Stabilität linearer Systeme - Das Nyquist-Kriterium

- **Das *vereinfachte* Nyquist-Kriterium lautet daher**

  Ist der offene Kreis asymptotisch stabil, so ist der geschlossene Kreis genau dann asymptotisch stabil, wenn der kritische Punkt (-1/0) in Richtung wachsender ω-Werte <u>links</u> der Ortskurve von $G_o(j\omega)$ liegt.

- **Verallgemeinerte Versionen des Kriteriums verfügbar für**
  - **<u>Instabile</u> offene Regelkreise**
  - **Stabile und instabile offene <u>Mehrgrößen</u>regelkreise**

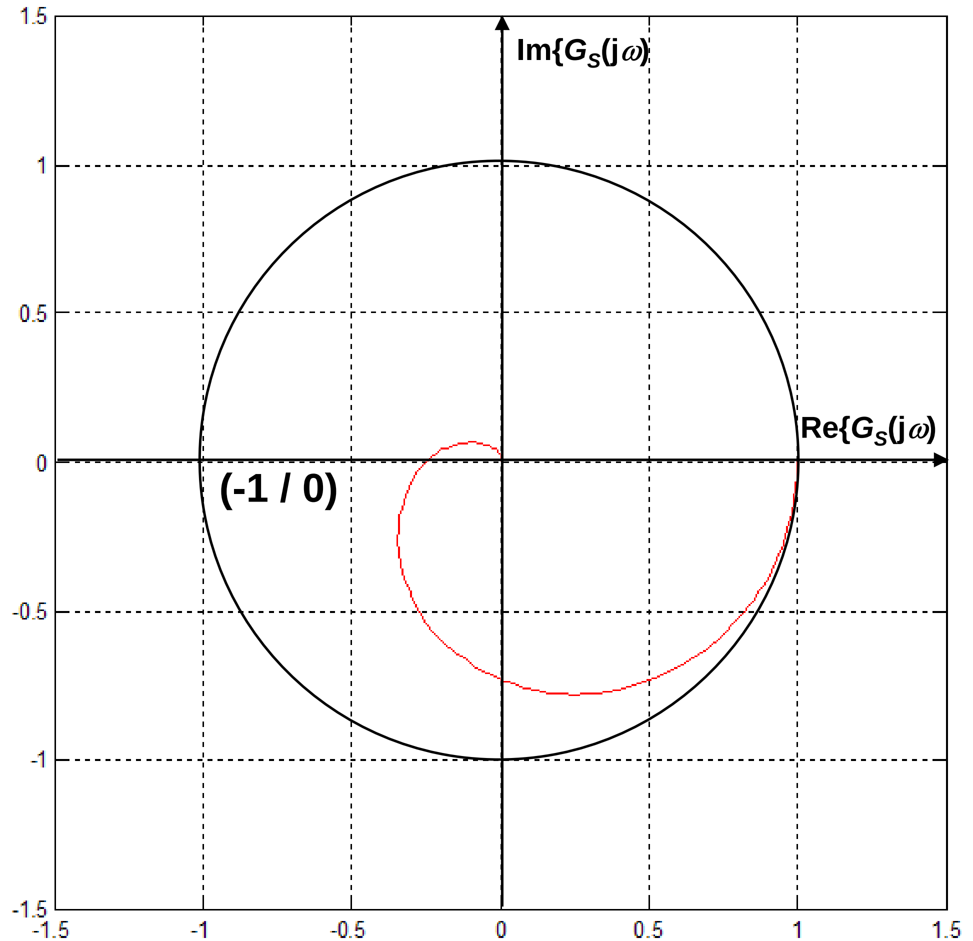
Stabilität linearer Systeme
- Das „Small-gain“-Theorem

- **Annahme: Offener Kreis stabil**
- **Regelkreis stabil, wenn**

$$\left| G_o(j\omega) \right| < 1$$

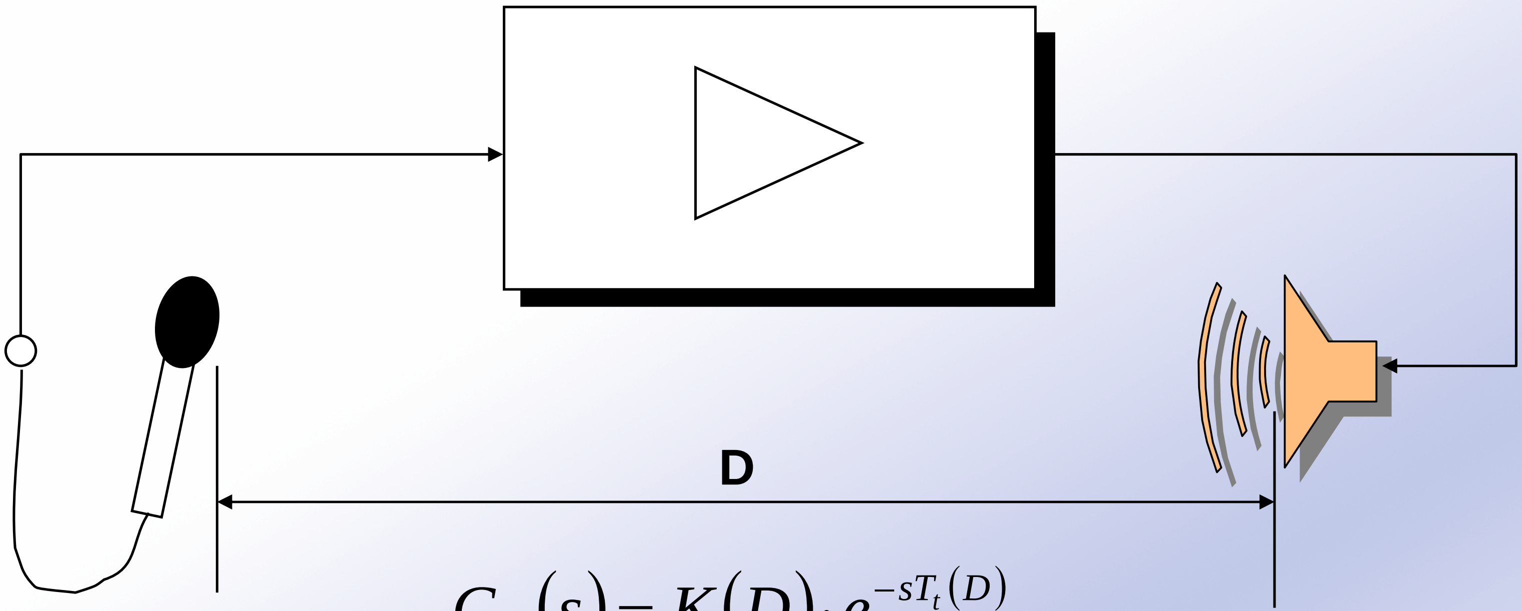
für alle ω

- **Vorteil: Amplitudenbetrachtung *hinreichend* für Stabilität, Phasenverlauf wird nicht benötigt**
- **Nachteil: Konservativ, *keine notwendige* Bedingung**
- **Grundlage moderne Regler-entwurfsverfahren (H_∞/μ-Synth.)**



Stabilität linearer Systeme
- Beispiel mit Totzeit

- **Audio-Anlage mit Lautsprecher und Mikrophon**
- **Positive Rückkopplung möglich ➔ Instabilität**
- **Abhilfe: Lautstärke reduzieren ➔ Funktioniert nach Small-Gain Theorem immer (auch ohne genaue Kenntnis der Strecke)**



$$G_{T_t}(s) = K(D) \cdot e^{-sT_t(D)}$$

Stabilität linearer Systeme
- Stabilitätsreserven

- **Ja/Nein-Aussage der Stabilitätskriterien allein nicht ausreichend für die Reglersynthese**

- **Zusätzlich benötigt: Angaben über den „Abstand“ des geschlossenen Regelkreises von der Stabilitätsgrenze**

- ***Stabilitätsreserven* als Abschätzungen für erreichbare**
  - **Regelgüte**
  - **Robustheit/Unempfindlichkeit des geschlossenen Kreises gegenüber Unsicherheiten bzw. Variationen der Regelstrecke**

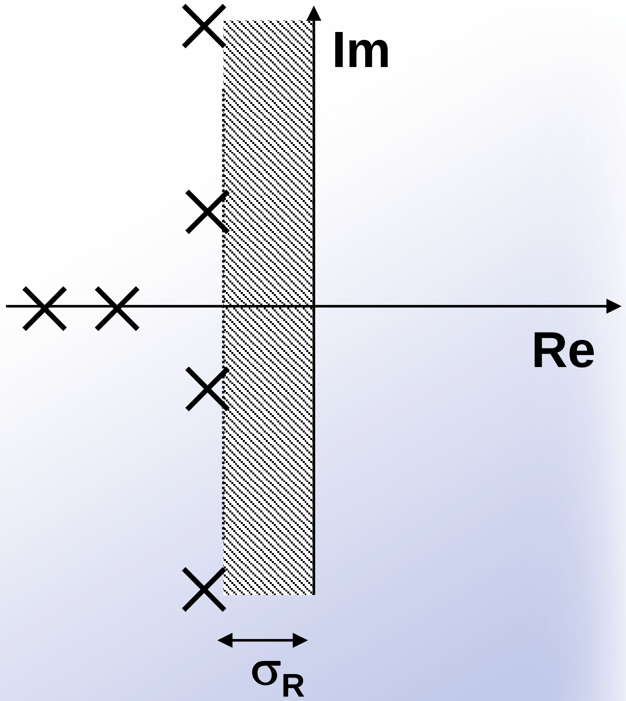
Stabilität linearer Systeme
- Absolute Stabilitätsreserve

- **Betrachtung der Pole des geschlossenen Kreises**

- **Alle Pole sind stabil und haben einen *Mindestabstand* σ_R zur Im-Achse**

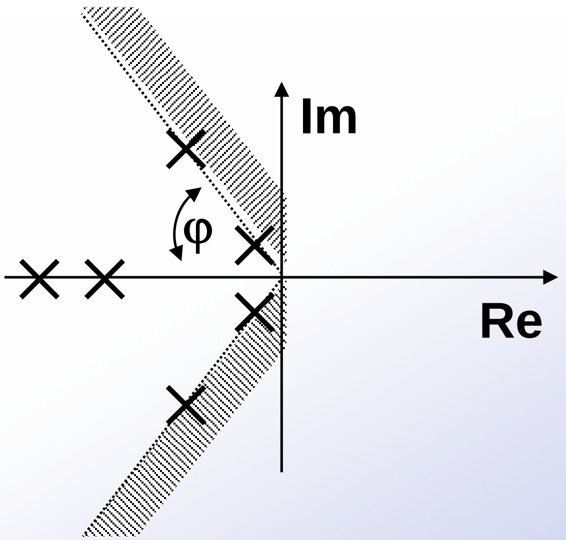
- **Garantiert eine bestimmte Einschwingzeit**

- **Nachteil: Resonanzschwingungen höherer Frequenz (Pole mit großem Im{}-Teil) können vergleichsweise schwach gedämpft sein**



Stabilität linearer Systeme - Relative Stabilitätsreserve

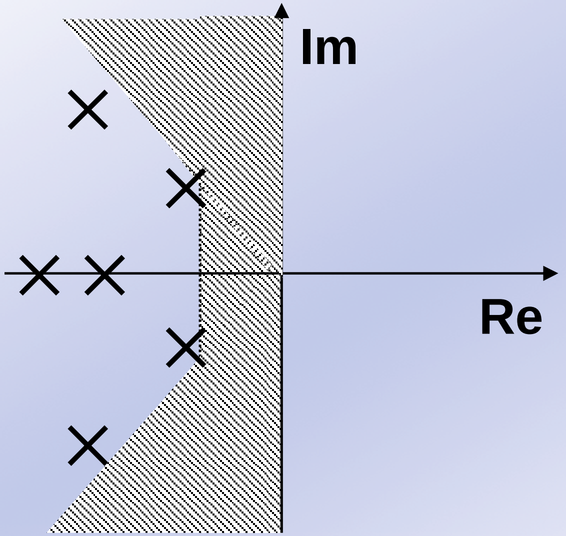
- **Winkel φ ist ein Maß für die Dämpfung konjugiert komplexer Eigenwerte**



- **Bessere Beschreibung des Abklingverhaltens**

- **Problem: Langsame konjugierte komplexe Eigenwerte können zu langen Einschwingvorgängen führen**

➔ Absolute und relative Stabilitätsreserve wird oft gemeinsam bewertet



Stabilität linearer Systeme - Amplitudenrand und Phasenrand

- Je größer der Abstand zum kritischen Punkt, desto größer die „Stabilitätsgüte“
- Auswertung des Abstands an zwei Punkten besonders einfach
  - *Amplitudenrand*
    Abstand des Schnittpunktes mit der reellen Achse von (-1/0)
  - *Phasenrand*
    Winkel zwischen reeller Achse und Durchtritt der Ortskurve durch den Kreis mit Betrag 1